

KMITANIE TYČÍ, PRAVOUHLÝCH TENKÝCH DOSIEK A MEMBRÁN

Anna Danihelová

Katedra fyziky, elektrotechniky a aplikovanej mechaniky, TU vo Zvolene

Abstrakt: Príspevok súhrnne pojednáva o kmitaní telies rôznych tvarov v závislosti od ich uloženia a spôsobu budenia. Poukazuje na možnosť využitia analýzy tvarov kmitania telies pri hodnotení kvality materiálu. Poskytuje pohľad na to, ako sa prenášajú najnovšie poznatky a skúsenosti do študijných programov Technológia dreva a Konštrukcia a procesy výroby drevárskych výrobkov.

Kľúčové slová: módy kmitania, elastické konštanty, vlastnosti materiálu, hudobné nástroje.

Úvod

Jednu z najväčších záhad v sebe skrývajú husle starých majstrov husliarov. Kvalita nástrojov závisí v značnej miere od vlastností materiálu použitého na ich výrobu. Pri výbere materiálu pre rôzne aplikácie je teda dôležité poznať jeho fyzikálne a technické charakteristiky. Tajomstvo kvality huslí starých majstrov husliarov, výrobcov gitár, xylofónov a ďalších hudobných nástrojov sa hľadá za pomoci najmodernejších metód. Moderné testy vibračných vlastností voľnej hornej a spodnej dosky huslí, ale aj celého nástroja pomáhajú odkrývať tajomstvá výrobcov hudobných nástrojov. Taylor z Kráľovského inštitútu vo Veľkej Británii: „ Ak mám hovoriť za vedu, potom si myslím, že sme začali pomáhať výrobcovi stavať vyrovnané, kvalitné nástroje. To ale ešte neznamená, že sme im umožnili dosahovať kvalitu stradivárok, pretože pravdu povediac, nevieme v čom tkvie kvalita stradivárok“.

Príspevok sa zaoberá šírením akustických vln v telesách rôznych geometrických tvarov (tyče, tenké dosky a membrány) v závislosti od spôsobu uloženia. Motiváciu pre hľadanie možností, metód zviditeľnenia zvuku, resp. kmitania hudobných nástrojov bola podstatne väčšia objektivita zraku ako sluchu. Pri zviditeľnení kmitania ide o zobrazenie fyzikálnej príčinnosti zvuku, ktorú reprezentuje niekoľko kmitajúcich bodov rezonančnej dosky hudobného nástroja, resp. určitá časť zvukového poľa pred hudobným nástrojom alebo iným zdrojom zvuku. Práve toto sa javí ako výhodnejšie voči jednoduchému zaznamenávaniu rýchlosti a amplitúdy kmitu v jedinom bode dosky, resp. poľa snímačom kmitov alebo meracím mikrofónom.

Existuje viacero metód, použitím ktorých je možné zviditeľniť kmitanie. Veľmi jednoduchou, rýchlou a dostupnou metódou je metóda Chladniho obrazcov, ktoré ukazujú geometriu rôznych spôsobov kmitania. Druhou nami používanou metódou je modálna analýza s harmonickým budením ako aj metódy založené na interferometrii. Tieto metódy umožňujú nielen vizualizáciu tvarov kmitania tyčí, tenkých pravouhlých dosiek, membrán, jednotlivých častí hudobných nástrojov, celých nástrojov, ale prostredníctvom empirických vzťahov aj výpočet elastických charakteristík materiálu.

Ohybové vlny v tyčiach

Tyč, resp. nosník je v prípade samozvukných hudobných nástrojov oscilátorom. Tón vzniká kmitaním celého nástroja alebo jeho súčastí. Táto skupina zahŕňa takmer všetky bicie nástroje s výnimkou bubnov (gong, zvonkohra, xylofón). Ak sú priečne rozmery tyče zanedbateľné, prevláda dĺžkový rozmer tyče a tento určuje prevažne ohybový tvar kmitov tyče. Tyč však môže byť rôzne zavesená alebo upevnená, čo

určuje rôzne okrajové podmienky. Frekvenciu základného ohybového módu kmitania tyče vyjadríme vzťahom:

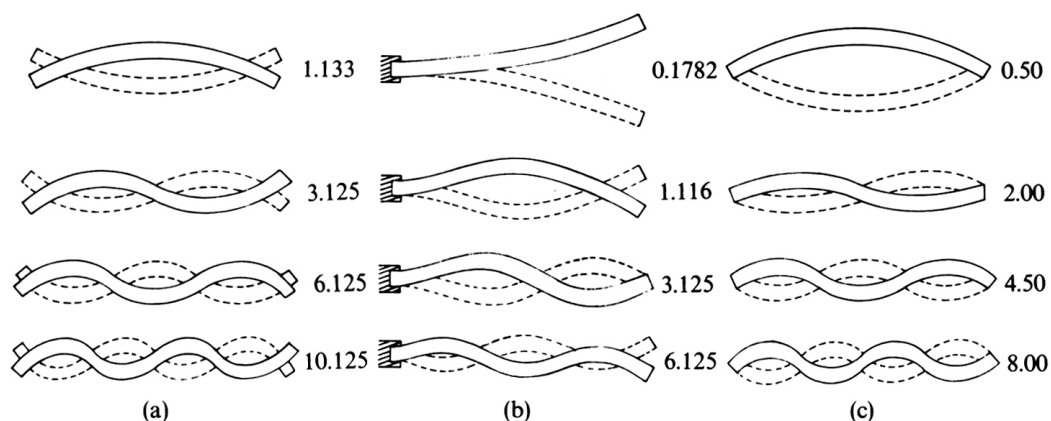
$$f_1 = K \frac{I}{L^2} c_L \quad (1)$$

kde L je dĺžka tyče, K je konštanta závislá od spôsobu uloženia tyče, I je kvadratický moment prierezu a c_L je rýchlosť pozdĺžnych vln. Okrem ohybových kmitov môžu tyče vykazovať aj pozdĺžne a torzné kmity. Pre frekvencie rezonančných módov tyče upevnenej, resp. voľnej na oboch koncoch platí vzťah (2) a pre upevnenú len na jednom konci vzťah (3)

$$f_n = n \frac{c_L}{2L} \quad (2)$$

$$f_n = (2n - 1) \frac{c_L}{4L} \quad (3)$$

Rozloženie rezonančných módov (Obr. 1), a teda aj ladenie (v prípade samozvučných hudobných nástrojov) je možné pri kmitajúcich tyčiach ovplyvňovať predovšetkým rozmermi a materiálom.



Obr.1: Kmitanie tyče a) voľne uloženej; b) jednostranne votknutej; c) voľne podopretej [2]

Pri hudobných nástrojoch (xylofón, marimba, vibrafón, zvonkohra) určitosť výšky a výrazný tónový charakter zvuku nástroja súvisí s odlišným frekvenčným rozložením rôznych typov módov. Ohybové módy totiž tvoria neharmonický rad frekvencií, torzné módy sa vytvárajú pri frekvenciách, ktoré tvoria takmer rad harmonických tónov a podobne harmonicky sa chovajú aj pozdĺžne módy [6].

Kmitanie tenkej dosky

Doska môže byť mať tri odlišné okrajové podmienky: voľne uložená, upnutá alebo jednoducho podopretá. V doske by sa zdanlivo mali pozdĺžne (tlakové) vlny šíriť rovnakou rýchlosťou ako v tyči ($c_L = \sqrt{E/\rho}$). V tomto prípade to nie je celkom pravda, keďže priečne deformácie sprevádzajúce pozdĺžne stlačenie v rovine dosky pridáva dodatočnú tuhosť.

Vzhľadom k tomu, že každá hrana pravouhlej dosky môže byť uchytená jedným z troch spôsobov (voľná, podopretá resp. upnutá hrana) existuje 27 kombinácií hraničných podmienok, teda aj rozličných súborov módov kmitania. V prípade podopretého okraja pre zodpovedajúce rezonančné frekvencie platí vzťah (4) podľa [2]:

$$f_{mn} = 0,453c_L h \left[\left(\frac{m+1}{L_x} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{n+1}{L_y} \right)^2 \right] \quad (4)$$

kde L_x a L_y sú rozmery dosky, c_L je rýchlosť pozdĺžnych vln, h je hrúbka, m a n udávajú počet uzlových čiar v smere y a x (okrem uzlov na hranách). Uzlové čiary sú rovnobežné s hranami, čo ale neplatí v prípade voľnej, resp. upnutej hrany. Jednotlivé módy popisujeme prostredníctvom počtu uzlových čiar ako (m, n) . Základný mód je označovaný ako $(0,0)$.

V prípade voľnej hrany dosky sa ukázalo, že výpočet módov je veľmi zložitý. Preto Rayleigh použil vlastnú metódu umožňujúcu približné riešenie, ktorého výsledky boli veľmi blízke k nameraným hodnotám. Limitnými prípadmi pravouhlého telesa sú štvorcové dosky a tenké tyče. Ak sa šírkový rozmer tyče zväčšuje, potom ohyb pozdĺž osi x vyvolá aj ohyb v smere kolmom. V prípade dosky takmer nebadateľná expanzia sprevádzajúca pozdĺžne stlačenie pridáva doske dodatočnú tuhosť, teda vzťah pre rýchlosť [5] pozdĺžnych vln je (5). Pre rýchlosť ohybových vln, ktorá závisí od frekvencie platí vzťah (6) odvodený z pohybovej rovnice pre ohyb. Frekvencia je úmerná k^2 podľa vzťahu (7)

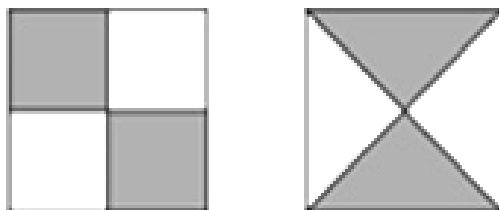
$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (5)$$

$$c_{oh} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\omega h c_L}{\sqrt{12}}} = \sqrt{1,8 f h c_L} \quad (6)$$

$$f = 0,0459 h c_L k^2 \quad (7)$$

Vo vzťahu (5) je ν je Poissonovo číslo, hodnota k sa zhoduje s normálovými módmí kmitania a závisí od hraničných podmienok. Niekoľko ohybových módov pravouhlej dosky môže byť odvodené od ohybových módov tyče, berúc do úvahy to, že v doske sa šíri kmitanie v dvoch smeroch (x, y) a výsledné kmitanie je ich kombináciou. Existuje teda väzba medzi ohybovými kmitmi v týchto smeroch, uzlové čiary nie sú ideálne rovnobežné s hranami dosky ($L_x \gg L_y$). Ak sa $L_y \rightarrow L_x$, uzlové čiary sa viditeľne zakrivujú. Pri $L_x = L_y$ je zmiešanie úplné. Na Obr. 2 sú znázornené prvé dva módy kmitania štvorcovej dosky. Základný mód kmitania je $(1,1)$, je to krúživý mód, pri ktorom protíahlé rohy kmitajú vo fáze a jeho frekvencia je daná vzťahom

$$f_{11} = \frac{c_T}{2L_y} = \frac{h}{L_x L_y} \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} = \frac{h c_L}{L^2} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \quad (8)$$

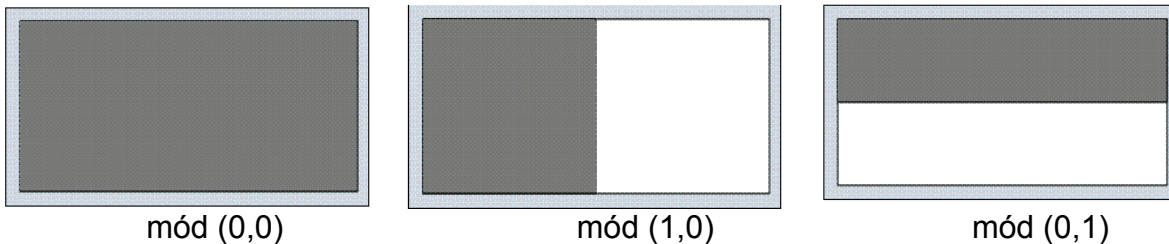


Obr. 2: Prvé 2 módy štvorcovej dosky s voľnými okrajmi

V prípade štvorcovej a pravouhlej dosky s upnutými okrajmi existuje veľký počet navrhnutých variácií tvarov módov rôznymi autormi. Vychádzajúc s hraničných podmienok určíme frekvenciu základného módu $(0,0)$ podľa vzťahu

$$f_{00} = \frac{1,654 h c_L}{L^2} \quad (9)$$

Z porovnania módov štvorcovej dosky s upnutými a voľnými okrajmi je zrejmé, že frekvencia módu (1,1) upnutej dosky je 10 krát vyššia ako s voľnými okrajmi; pod módom (1,1), ktorý je základný (prvý) pri kmitaní dosky s voľnými okrajmi, existujú pri kmitaní dosky upnutej ešte tri módy (Obr. 3).



mód (0,0) mód (1,0) mód (0,1)
Obr. 3: Prvé 3 módy kmitania štvorcovej dosky s upnutými okrajmi

Pre popisanie tvarov kmitania drevených dosiek je potrebné poznať štyri elastické konštanty. Moduly pružnosti pozdĺž (E_x) a naprieč (E_y) vlákien, šmykový modul (G_{xy}) a dve Poissonove čísla (ν_{xy} , ν_{yx}). Vzhľadom k tomu, že drevo je anizotropný materiál, je potrebné modifikovať vzťahy (4) až (9) tak, že E bude nahradené E_x alebo E_y a ν^2 nahradí ν_{xy} ν_{yx} , napr. vo vzťahu (4) a dostaneme vzťah (4')

$$f_{mn} = 0,453h \left[c_L \left(\frac{m+1}{L_x} \right)^2 + c_T \left(\frac{n+1}{L_y} \right)^2 \right] \quad (4')$$

pričom platí:
$$\frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x} \quad (10)$$

Vyššie uvedené zákonitosti kmitania dosiek sú využívané pri výbere vhodného materiálu na stavbu ozvučníc reproduktorových sústav, niektorých perkusných hudobných nástrojov (cajon, djembe, darbuka) ako aj pri ich ladení (Obr. 4).



Obr.4: Niektoré tvary módov použité pri ladení dosiek korpusu cajonu

Husľové dosky

Husľové dosky majú zložitý tvar, sú klenuté a v technickej terminológii sa nazývajú „plytké mušle“. Tvarová zložitnosť ako aj anizotropia dreva ovplyvňujú tvary kmitania voľnej husľovej dosky. Na Obr. 5 sú predstavené tvary 1. módu (krútiaci mód), 2. a 5. módu (ohybové módy). Tieto módy sú používané pri tvarovaní (ladení) dosiek a meraní rezonančných frekvencií, ktoré sú potrebné pre výpočet vyššie spomenutých elastických konštant. Pre výpočet modulov pozdĺž vlákien – E_x a naprieč vlákien – E_y platia vzťahy (11) a (12), v ktorých $\eta = 1 - \nu_{xy}\nu_{yx}$, pričom ν_{xy} a ν_{yx} sú Poissonove čísla.

$$E_x = 12\eta D_1, \text{ kde } D_1 \approx \frac{f_5^2 \rho a^4}{h^2} \quad (11)$$

$$a \quad E_Y = 12\eta D_3, \text{ kde } D_3 \approx \frac{f_2^2 \rho b^4}{h^2} \quad (12)$$



Obr. 5: Módy 1., 2. a 5. voľnej spodnej husľovej dosky

Na základe teoretických výpočtov metódou konečných prvkov a výsledkov experimentov je možné konštatovať, že tvary módov 1., 2. a ich rezonančné frekvencie závisia predovšetkým od hrúbky a 5. mód je najcitlivejší na výšku klenby dosky. Preto tu spomenuté módy sa využívajú aj pri ladení dosiek strunových hudobných nástrojov.

Kmitanie membrány

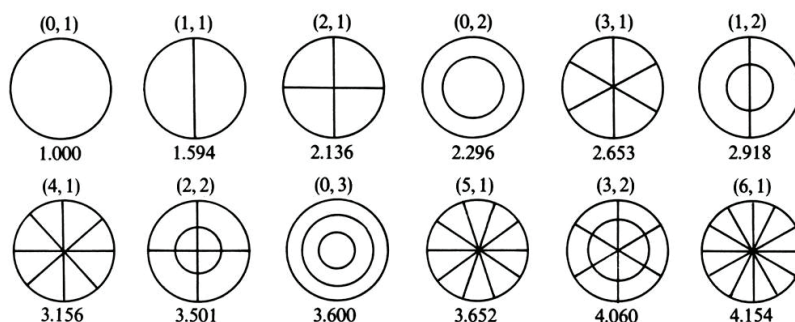
Tón v prípade blanozvučných nástrojov (najmä bubny, tympany, tamburína) vzniká kmitaním membrány, ktorá býva vyrobená najčastejšie z kože alebo z plastu.

Rezonančné módy kmitajúcej ideálnej membrány netvoria harmonický rad frekvencií. Pre frekvenciu najnižšieho a tvarovo najjednoduchšieho módu platí vzťah:

$$f_{01} = \frac{0,3827}{R} c_0 \quad (13)$$

pričom $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ je rýchlosť šírenia ohybových vln, kde T je napätie membrány, ρ je hustota.

Vzhľadom k dvojrozmernosti oscilátora sú tvary kmitov dvojakého typu: *radiálne* (m) a *kruhové* (n). Radiálne módy tvoria približne harmonický rad frekvencií, teda zvukový charakter týchto módov je zväčša tónový a vykazujú malé tlmenie. Kruhové módy sú silne tlmené, ich frekvenčné pomery sú neharmonické a zvukový charakter je výrazne hlukový (Obr. 6). Intenzita módov je ovplyvnená miestom budenia (pri budení v strede prevažujú v kmitaní kruhové módy).



Obr. 6: Prvých 14 rezonančných módov ideálnej tenkej kruhovej membrány [2]

Kmitanie reálnych membrán je úplne odlišné od ideálnych (homogénne, rovnomerne napnuté, nezaťažené *rezonátorom*, t.j. objemom vzduchu) membrán. Pri reálnych membránach (bubon, tympany) vplyva na zmenu rezonančných frekvencií jednotlivých módov hlavne zaťaženie objemom vzduchu, ohybová a šmyková tuhosť membrány [6].

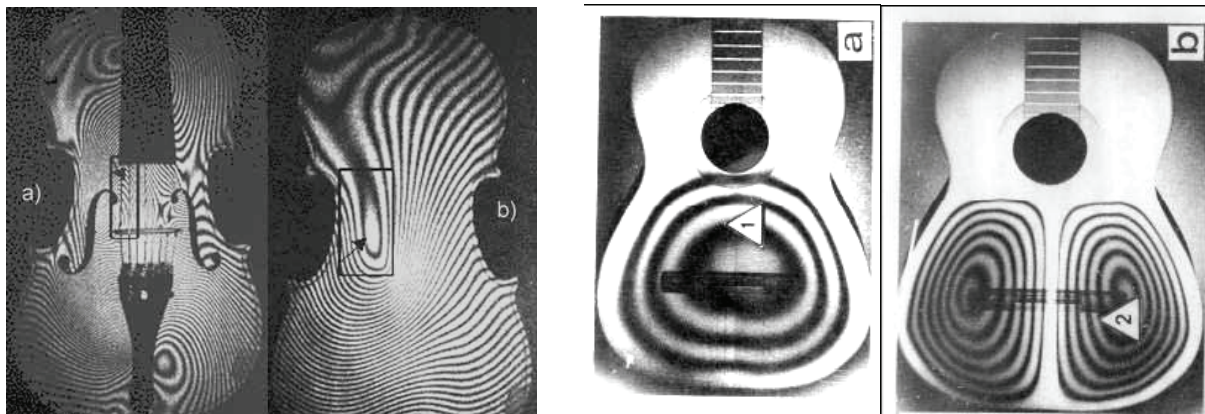
Metóda Chladniho obrazcov

Chladniho metódu na skúmanie kmitania husľových dosiek ako prvý použil F. Savart. Husľová doska je klenutá a má zložitú geometriu, no Savart pre zjednodušenie použil ploché pravouhlé teleso. Neskôr bola táto metóda znova objavená a ďalej vyvíjaná Beldierom a Hutchins.

Chladniho obrazce (uzlové čiary stojatého vlnenia) ukazujú geometriu rôznych spôsobov kmitania skúmaného dvojrozmerného objektu. Tvar uzlových čiar je charakteristický pre príslušný mód, pričom závisí od symetrie, homogénnosti dosky, rozmerov a spôsobu uchytenia (hraničných podmienok). Každý Chladniho obrazec vzniká len pri určitej rezonančnej frekvencii. Okrem hodnoty tejto rezonančnej frekvencie sú veľmi dôležité pomery medzi jednotlivými rezonančnými módami. Presnosť určenia rezonančnej frekvencie je ovplyvnená kvalitou rezonancie, spôsobom, miestom a intenzitou budenia kmitov.

Holografická interferometria

Holografická interferometria umožňuje výskum mechanických deformácií povrchov, vibrácií. Metóda porovnáva medzi sebou dve informačné vlny, ktoré pôvodne neexistovali v tom istom čase. Pomocou tejto metódy je možné zaznamenať umiestnenie uzlových čiar a premiestnenie kmitajúcich oblastí dosky s vysokou presnosťou (na zlomok vlnovej dĺžky laserového žiarenia). Zaznamenané obrazce – interferogramy huslí a gitary (Obr. 7a, Obr. 7b) v mnohom pripomínajú Chladniho obrazce, avšak interferenčné pružky nie sú uzlové čiary. Módy kmitania celého hudobného nástroja sú úplne odlišné od tvarov módov pozorovaných na voľných doskách.



Obr. 7a: Holografický interferogram huslí [1] Obr. 7b: Holografický interferogram gitary [4]

Interferometrické merania umožňujú bezkontaktné meranie, pričom priebeh kmitania je daný len vlastnosťami objektu, jeho uloženia (upevnenia). Táto metóda sa využíva len pri skúmaní rezonančných vlastností voľných dosiek, resp. kompletného hudobného nástroja, pričom sa hodnotí tvar a rozloženie interferenčných kriviek pri zodpovedajúcich frekvenciách, niekedy sa vypočítava absolútna hodnota deformácie [6]. Výhodou metódy je, že umožňuje v reálnom čase pozorovať zmeny tvaru interferenčných kriviek v závislosti od budiacej frekvencie. Na druhej strane jej nevýhoda spočíva v tom, že nie je vidieť, či fázový posun je pozitívny alebo negatívny (nie je možné zistiť či daná oblasť kmitá smerom dovnútra, resp. von z nástroja).

Elektronická speckle interferometria

Je to metóda analogická holografickej interferometrii, využíva vlastnosti laserových škvŕn (specklov) a digitálne spracovanie obrazu. Často je dopĺňaná technikou tzv. vzorkovania fázy umožňujúcou jednoznačné určenie fázy kmitania v interferograme. Samotný interferogram dostáva svoju obrazovú podobu pomocou číslcového spracovania obrazu výpočtom v obrazovom procesore pomocou určitého algoritmu [7].

Elektronická speckle interferometria (ESPI) tiež nazývaná elektricko-optická holografia sa využíva pri zisťovaní zmien polohy, zviditeľňovaní kmitania atď. ESPI umožňuje zaznamenať dva odlišné stavy kmitajúceho objektu vo veľmi krátkom čase a kvantitatívne porovnať tieto stavy. ESPI využíva rozptyl laserového svetla na nerovnostiach skúmaného povrchu. Skúmaný objekt je osvetlený dvoma krátkymi, po sebe idúcimi pulzmi laserového svetla. Vlny spolu interferujú, vytvárajú speckle obrazce, ktoré môžu byť zachytené CCD kamerou a uložené do počítača. Počítač spracuje interferenčný obrazec prvého pulzu medzi referenčným lúčom a lúčom odrazeným od plochy nedeformovanej kmitaním a druhého pulzu medzi tým istým referenčným lúčom a lúčom odrazeným od jednotlivých bodov kmitajúcej plochy (Obr. 8). Zobrazenie objektu osvetleného laserovým svetlom má náhodné rozloženie specklov, ktoré sú veľmi citlivé na pohyb povrchu objektu. Výsledná intenzita interferujúcich zväzkov svetla (I_0 , I_1) v obrazci pred deformovaním je daná:

$$I(x, y) = I_0(x, y) + I_1(x, y) \cos \varphi(x, y) \quad (14)$$

kde $I_0(x, y)$ je intenzita pozadia, $I_1(x, y)$ je amplitúda a $\varphi(x, y)$ je relatívna fáza medzi dvoma interferujúcimi svetelnými vlnami. Rozloženie intenzity v obrazci objektu po deformácii je:

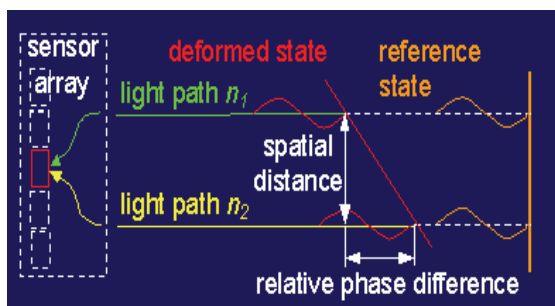
$$I_f(x, y) = I_0(x, y) + I_1(x, y) \cos[\varphi(x, y) + \Delta\varphi(x, y)] \quad (15)$$

kde $\Delta\varphi(x, y)$ je zmena fázy spôsobená kmitaním. Intenzita $I(x, y)$ a specklov sa môže meniť, pričom intenzitu interferogramu je možné zjednodušene vyjadriť:

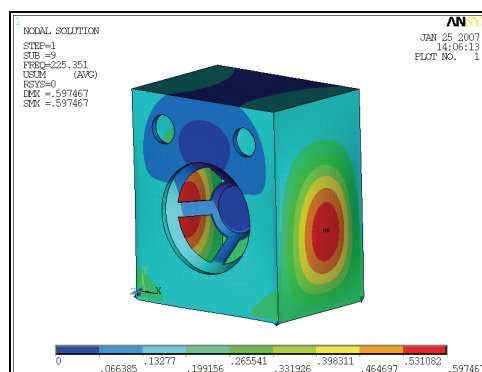
$$I(x, y) = I_0(x, y) [1 + \gamma(x, y) \cos \Delta\varphi(x, y)] \quad (16)$$

kde $I_0(x, y)$ je intenzita pozadia a $\gamma(x, y)$ je interferenčný kontrast (viditeľnosť):

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (17)$$



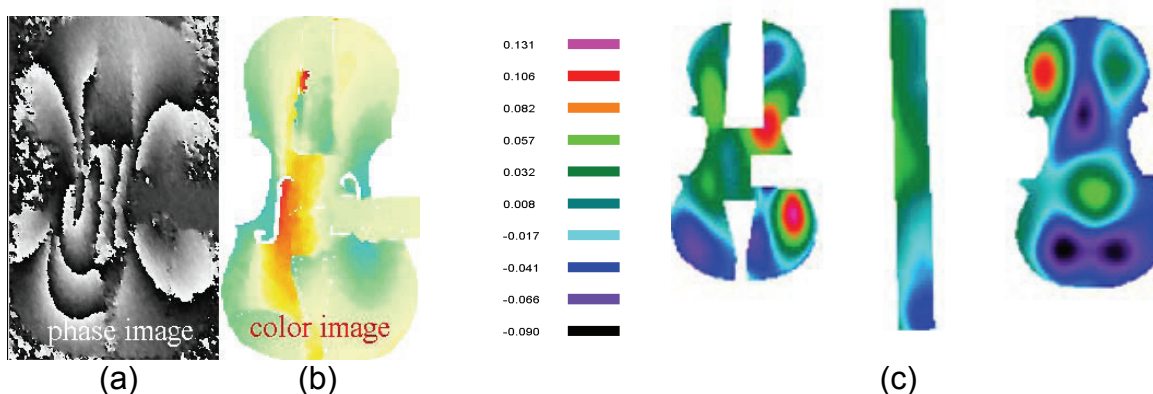
Obr. 8: Princíp ESPI metódy [3]



Obr. 9: Tvary kmitania ozvučnice reproduktora

Na Obr. 9 je tvar kmitania reproduktorovej ozvučnice pri frekvencii 220 Hz zaznamenaný metódou ESPI. Obr. 10 predstavuje fázovú mapu (a), farebnú predstavu deformovaného povrchu (b), tvary kmitania pri frekvencii 2 004 Hz (amplitúdová mapa) s výchytkou a fázou rozlíšenou farebným spektrom sú

na Obr. 10(c). ESPI metóda zobrazuje jednu fázu výchylky od bielej po červenú stranu spektra a opačnú fázu od bielej po modrú stranu spektra.



Obr. 10: Fázová (a), farebná (b) mapa, (c) tvar kmitania huslí pri 2 004 Hz

Záver

Hodnotenie (skúmanie) hudobných nástrojov objektívnymi metódami je veľmi zložitý. Môžu byť síce použité rôzne metódy, problém je však v tom, že rôzne metódy nedávajú rovnaké výsledky. Zostáva teda zistiť, ktorý faktor je skutočne dôležitý (významný) pre objektívne hodnotenie zvukovej kvality hudobných nástrojov. Riešenie je možné využitím vedomostí z niekoľkých vedných disciplín. Metóda ESPI sa ukázala vhodná pre skúmanie v oblasti hudobných nástrojov, nakoľko umožňuje presnú analýzu kmitania častí ako aj celých hudobných nástrojov. ESPI metóda dopĺňa merania frekvenčných charakteristík a mechanických vlastností materiálov, čím sa hodnotenie hudobných nástrojov stáva komplexnejším a objektívnejším.

Podakovanie

Príspevok je publikovaný s podporou Grantovej agentúry MŠ SR, VEGA č. 1/0841/08 – „Charakteristiky dreva určujúce jeho kvalitu pri využití na výrobu špeciálnych výrobkov“.

Literatúra

- [1] ČERNECKÝ, Jozef, MARČOK, Milan. 1998. *Aplikácia holografickej interferometrie vo výskume vibračných akustických vlastností huslí*. Zvolen: Vydavateľstvo TU vo Zvolene, 1998, 74 s.
- [2] FLETCHER, Neville H., ROSSING, Thomas D. 1991. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991, 620 p.
- [3] http://www.isi-sys.com/isi-sys-english/sensor-systems/principle/resolution_e.htm
- [4] JANSSON, Erik. 2002. *Acoustics for violin and guitar makers*. Part V. Vibration Properties of the Wood and Tuning of Violin Plates. Fourth edition Kungl Tekniska Hogskolan, 2002, 32 p.
- [5] LEISSA, A.W.. Vibration of Plates. NASA SP-160, NASA, Washington, D.C.
- [6] SYROVÝ, Václav. 2003. *Hudební akustika*. Praha: Akadémia umení, 2003, 427 s.
- [7] URGELA, Stanislav. 1999. *Holografická interferometria pri nedeštruktívnom testovaní dosák*. Matcentrum, Zvolen, 1999, 77 s.

Adresa autora

doc. RNDr. Anna Danihelová, PhD.
Katedra fyziky, elektrotechniky a aplikovanej mechaniky
Technická univerzita vo Zvolene
T.G. Masaryka 24, 960 53 Zvolen
adanihel@vsld.tuzvo.sk